Convergence d'une suite de polygones

Thm : (Déterminant circulant) Soient $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$. $\begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1\\ a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0\end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_j\omega^{ij}$

où $\omega=\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$

· Soit G groupe abélien fini. Pour $f\in\mathbb{C}[G]$, posons $\phi_f : \mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$, $g\mapsto f*g$

où $f*g : h\mapsto \sum_{k\in G} f(k)\,g(k^{-1}h)$

Soit $\chi\in\hat G$. Notons $\mathcal{F}$ la TFD. $\mathcal{F}(f*\chi)=\hat f\,\hat\chi$, $\mathcal{F} : \mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[\hat G]$

Soit $u\in\hat G$. et $\hat f : \chi\mapsto \sum_{x\in G} f(x)\chi(x)$.

$\hat\chi(u) = \sum_{x\in G}\chi(x)u(x) = |G|\langle \chi,\bar u\rangle = \begin{cases}|G| & \text{si } \bar u=\chi\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} = |G|\,\delta_{\chi^{-1}}(u)$.

car $\chi^{-1}=\bar\chi$. racines de 1.

Ainsi, $\mathcal{F}(f*\chi)=\hat f\hat\chi = |G|\hat f\,\delta_{\chi^{-1}} = |G|\,\hat f(\chi^{-1})\,\delta_{\chi^{-1}}$.

Par TF inverse, $f*\chi = \frac{1}{|G|}\sum_{u\in\hat G}\mathcal{F}(f*g)(u)\,u^{-1} = \hat f(\chi^{-1})\,\chi$.

Puisque $\hat G$ est une base de $\mathbb{C}[G]$ et $\forall\chi\in\hat G$, $\phi_f(\chi)=\hat f(\chi^{-1})\chi$, c'est une base de vecteurs propres.

· Si $g\in G$, $f*\delta_g : h\mapsto f(g^{-1}h)$. La matrice de ϕ_f dans la base $\{\delta_g\}$ est $(f(g^{-1}h))_{g,h}$

Choisissons $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $f(i)=a_i$.

On obtient alors $\mathrm{Mat}\,\phi_f = (f(i-j))_{0\le i,j\le n-1} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1\\ a_1 & \ddots & & a_{n-1}\\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0\end{pmatrix}$

Son déterminant est le produit de ses vp : $\prod_{\chi\in\hat G}\hat f(\chi^{-1}) = \prod_{\chi\in\hat G}\hat f(\chi)$

Pour $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\chi\in\hat G$ est de la forme $\chi : k\mapsto\omega^{ki}$, donc $\hat f(\chi)=\sum_{j=0}^{n-1} f(j)\,\omega^{ij}$

Finalement, le det cherché vaut $\prod_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_j\,\omega^{ij}$.

Thm : La suite de polygones de sommets $Z_k=(z_{k,1},\dots,z_{k,n})$, donnée par $Z_0=(z_{0,1},\dots,z_{0,n})$ et $Z_{k+1}=((1-\lambda)z_{k,1}+\lambda z_{k,2},\dots,(1-\lambda)z_{k,n}+\lambda z_{k,1})$, $\lambda\in]0,1[$, est convergente de limite l'isobarycentre du premier polygone

$Z_{k+1}=AZ_k$ avec $A=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda & & (0)\\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & \lambda\\ \lambda & & & 1-\lambda\end{bmatrix}$ donc $Z_k=A^kZ_0$.

$\chi_A(x)=\begin{vmatrix} x-(1-\lambda) & -\lambda & & (0)\\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & -\lambda\\ -\lambda & & (0) & x-(1-\lambda)\end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(x-(1-\lambda)-\lambda\tilde\omega^{i}\right)$ où $\tilde\omega=\exp\left(\frac{2i\pi(n-1)}{n}\right)$.

Donc A est diagonalisable, de valeurs propres $\{1-\lambda+\lambda\tilde\omega^j,\ j\in\{0,\dots,n-1\}\}$.

de module strictement inférieur à 1 pour $j\neq 0$ car barycentre de 1 et $\tilde\omega^j$.

Ainsi, $Z_k\to A_\infty Z_0$ où $A_\infty\sim\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$. Notons $X=A_\infty Z_0$ la limite.

$Z_{k+1}=AZ_k$ assure $AX=X$ donc $X\in E_1(A)=\mathrm{Vect}(1,\dots,1)$: $X=(\alpha,\alpha,\dots,\alpha)$

Si g_k est isobarycentre de P_k, $g_{k+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_{k+1,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda)z_{k,i}+\lambda z_{k,i+1} = g_k=\dots=g_0$.

Donc l'isobarycentre de X est g_0, puis $X=g_0$.